Πόρισμα:

Αν X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμ. γραμ. τελ 1-1 επί τότε και ο $T^{-1}: Y \to X$ είναι φραγμένος (Δηλ. γραμ. ισομορφισμός)

Αποδ.

Απο το Θεώρημα ανοιχτείς απεικόνισης ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Άρα, $\forall G \subset X$ ανοιχτό : $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$ ανοιχτό

Άρα, T^{-1} συνεχής $\Rightarrow T^{-1}$ φραγμένος γραμ. τελ.

Πόρισμα :

Αν $\|\ \|, \|\ \|'$ δυο νόρμες σε ενα δχ X ωστε $(X, \|\ \|)$ και $(X, \|\cdot\|')$ να είναι χώρα Banach και $\exists M > 0$:

$\|x\| \leq M \cdot \|x\|'$ τοτε $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$

(δηλ. θα ισχυει οτι $\exists M'>0 : \|x\|' \leq M' \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$)

Αποδ

Ο ταυτοτικος τελεστης $Id : (X, \|\cdot\|') \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ από την υποθεση $\|x\| \leq M \cdot \|x\|'$ θα είναι φραγμενος γραμ. τελεστης. Μαλιστα δε, οπως ταυτοτικος θα είναι 1-1 και επί. Αρα, απο το προηγούμενο πορισμα ο Id είναι γραμμικος ισομορφισμος. Συνεπώς, οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες

Παρατηρηση

Αν X, Y δυο μ.χ. και $f : X \rightarrow Y$ συνεχης τότε το γράφημα της f

$G_f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subseteq X \times Y$ είναι κλειστό

Αποδ

Εστω $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθια στο G_f και $(x, y) \in X \times Y$ ώστε $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$

Θδο $(x, y) \in G_f$

$x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$ και αφου f συνεχης τοτε $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$ και $f(y_n) \xrightarrow{d} f(y)$

Αρα, $y = f(x)$

Δηλαδή, $(x, y) \in G_f$

Το αντίστροφο δεν ισχύει

για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι ασυνεχης στο 0

και το γράφημα της είναι κλειστο συνολο $\subseteq \mathbb{R}^2$ αφου το G_f^c είναι ανοιχτο

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν X και Y νορμικοί χώροι ο $X \times Y$ είναι νορμικός χωρος με νορμα $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ή με νόρμα

$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ αφού είναι ισοδύναμες

Επίσης, αν X, Y χώροι Banach τότε X×Y χώρος Banach

Θεώρημα (κλειστού γραφήματος)

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, και το $G_T = \{(x, Tx) : x \in X\}$ κλειστό στον X×Y τότε ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής

Απόδειξη

X×Y χώρος Banach ως γινόμενο χώρων Banach

Το G_T είναι κλειστός υπόχωρος του X×Y, άρα είναι χώρος Banach. Οι προβολές

$\Pi_1 : X \times Y \to X$ και $\Pi_2 : X \times Y \to Y$ είναι φραγμ. γραμμικοί τελεστές.

Ορίζω τον $S := \Pi_1|_{G_f} \to X$ (δηλ. ο περιορισμός του Π_1 στον G_f), είναι φραγμ. γραμ. τελεστής 1-1 και επί

Από το προηγούμενο πόρισμα ο $S^{-1} : X \to G_T$ με τύπο $S^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος γραμ. τελεστής. Άρα, ο $\Pi_2 \circ S^{-1}$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ως σύνθεση τέτοιων

Αλλά, $\Pi_2 \circ S^{-1} = T$ άρα και φραγμένος.

Άσκηση 1

Έστω ο χώρος $C_{00}(\mathbb{N})$ ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε την $f_n : C_{00}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ τύπου $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in C_{00}(\mathbb{N})$

Κάθε f_n γραμμική (εμφανές) και $\forall x \in C_{00}(\mathbb{N})$ έχουμε $|f_n(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n \cdot \|x\|_\infty$

Άρα, f_n φραγμένος και άρα $\|f_n\| \le n$

Έτσι, $f_n \in X^*$. Επίσης, αν επιλέξουμε το διάνυσμα $x = (1, 1, \ldots, \underset{n\text{-θέση}}{1}, 0, 0, \ldots) \in C_{00}(\mathbb{N})$ βλέπουμε ότι:

$\|x\|_\infty = 1$, άρα $\|f_n\| \geq f_n(x) = \overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ φορές}} = n$

Άρα, $\|f_n\| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Επομένως, $\sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Ενώ, $\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00}(\mathbb{N})$ $\exists m = m_x \in \mathbb{N}$ ώστε

$x_i = 0$, $\forall i > m$

Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

Άρα, έχουμε ότι

$\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| < \infty$

<u>Συμπέρασμα</u>:

Στην αρχή ομοιόμορφου φράγματος η υπόθεση της πληρότητας του πεδίου ορισμού δεν μπορεί να παραλειφθεί

<u>Άσκηση 2</u>

Έστω ο χώρος $\underbrace{\ell^1(\mathbb{N})}_{(X, \|\cdot\|_1)}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_1$ και έστω ο χώρος $\underbrace{\ell^1(\mathbb{N})}_{=(Y, \|\cdot\|_\infty)}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ ώστε ο πρώτος να είναι Banach ενώ ο δεύτερος όχι. Έστω επίσης, $Id\ X \to Y$ ταυτοτικός τελεστής ο οποίος είναι 1-1 και επί, φραγμένος γραμ. τελ.

Αφού, $\forall x \in \ell^1(\mathbb{N})$: $\|Id\|_\infty = \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, $\forall x \in \ell^1(\mathbb{N})$

όμως, ο Id δεν είναι ανοιχτή απεικόνιση, διότι ο Id θα ήταν γραμ. ισομορφισμός και τότε ο Y θα ήταν Banach (άτοπο)

<u>Συμπέρασμα</u>:

Η υπόθεση της πληρότητας στο πεδίο αφίξεως στο Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης δεν μπορεί να παραλειφθεί

αφού Id όχι ανοιχτή

Επίσης, $Id^{-1} : Y \to X$ μη φραγμένος αλλά το γραφημα του Id είναι κλειστό αφού Id είναι συνεχής.

$\varphi: X\times Y \longrightarrow Y\times X$ τέτοιου $\varphi(x,y)=(y,x)$

είναι ομοιομορφισμός.

Εφόσον $\varphi(G_{Id}) = G_{Id^{-1}}$

Άρα το γράφημα του Id^{-1} είναι κλειστό στον $Y\times X$

Συμπερασμα

Η υπόθεση ότι το π.ο είναι χώρος Banach στο Θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν μπορεί να παραληφθεί

Ασκηση 3

Εστω I απειρο συνολο

$X := C_{00}(I) = \{ x: I \to \mathbb{R} \,/\, \{i\in I: x(i)\neq 0\} \text{ πεπερ.} \}$.

και με νορμα $\|.\| : C_{00}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\|x\| = \sum_{i\in I} |x(i)|$

Ο X με πράξεις κατά σημείο είναι νορμα στο X αλλα $(X,\|.\|)$ οχι χώρος Banach

Περιγραφή απόδειξης

Αν $J\subset I$ άπειρο και αριθμήσιμο, δειχνουμε ότι $C_{00}(J)$ είναι κλειστος στον $C_{00}(I)$

Εφόσον $C_{00}(\mathbb{N}) \sim C_{00}(J)$ δεν είναι Banach άρα, ο $C_{00}(I)$ δεν είναι χώρος Banach

Ασκηση 4

Εστω Y απειροδιαστατος χώρος Banach και έστω $(y_i)_{i\in I}$ μια Hamel βάση αυτου με $\|y_i\|=1$, $\forall i\in I$. Έστω $X = C_{00}(I)$

με νορμα όπως την άσκηση 3.
Ορίζουμε την εξής απεικόνιση
$T: X \to Y$ με $T(x) = \sum_{i\in I} x(i)\cdot y_i$
η οποία είναι γραμμική 1-1 και επι (αφού η $(y_i)_{i\in I}$ Hamel βάση του Y) και ισχύει:
$\forall\, x\in X: \|T(x)\| = \|\sum_{i\in I} x(i) y_i\| \leq \sum_{i\in I} |x(i)|\cdot\|y_i\| = \sum_{i\in I} |x(i)| = \|x\|$
Άρα, T φραγμ. γραμμ. τελεστής με νορμα $\|T\| \leq 1$. Έτσι λοιπόν η T δεν είναι ανοιχτή απεικόνιση (διότι θα ήταν γραμμ. ισομορφισμός) και ο X ως γραμμ. ισομορφ. του Y θα ήταν χώρος Banach του Y

<u>Συμπέρασμα 1</u>: Η υπόθεση ότι το π.ο. είναι χώρος Banach στο Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης δεν μπορεί να παραληφθεί

Επίσης, ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος (διότι ο T δεν είναι ανοιχτή απεικόνιση)
T συνεχής $\Rightarrow G_T$ κλειστό $\Rightarrow G_{T^{-1}}$ κλειστό

<u>Συμπέρασμα 2</u>: Η υπόθεση ότι το πεδίο τιμών είναι χώρος Banach στο Θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν μπορεί να παραληφθεί

Άσκηση 5

Έστωσαν X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν για κάθε $f \in Y^*$ ισχύει $f\circ T \in X^*$ τότε νδο T είναι φραγμένος
<u>Αποδ</u>
$\forall\, (x,y) \in X\times Y$ το $(x,y) \in G_T \Leftrightarrow T(x) = y \overset{\text{Πόρισμα Hahn-Banach}}{\underset{Y^* \text{ διαχωρίζει τα σημεία του } Y}{\Longleftrightarrow}}$
$\Leftrightarrow \forall f \in Y^*: f(T(x)) = f(y)$

Άρα, $G_T = \bigcap_{f \in Y^*} \{(x,y) \in X \times Y : (f \circ T)(x) = f(y)\}$. είναι ένα κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών. Πράγματι, για κάθε $f \in Y^*$ ισχύει $f \circ T \in X^*$ (υπόθεση). Θεωρώ τη συνάρτηση $S : X \times Y \to \mathbb{R}$

$$S(x,y) = (f \circ T)(x) - f(y) = (\underbrace{(f \circ T) \circ \pi_1}_{\text{συνεχής}})(x,y) - (\underbrace{f \circ \pi_2}_{\text{συνεχής}})(x,y). \text{ : συνεχής}$$

$S^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in X \times Y \ (f \circ T)(x) = f(y)\}$ είναι κλειστό στο $X \times Y$

Άρα, G_T κλειστό $\subseteq X \times Y$

Άρα, από το Θεωρ. κλειστού γραφήματος ο T είναι συνεχής.

Άσκηση 6

Έστω X νορμικός, $A \subset X$ Τότε A φραγμένο αν.ν $\forall f \in X^*$ το $f(A) \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο

Λύση

A φραγμένο $\Leftrightarrow \sup\{\|x\| : x \in A\} < +\infty$

και όλο $\forall f \in X^* : \sup\{|f(x)| : x \in A\} < +\infty$ και αντίστροφα

($\Rightarrow$): Θέτουμε $M = \sup\{\|x\| : x \in A\} \in \mathbb{R}$ τότε $\forall f \in X^*$

$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|f\| \cdot M < +\infty$

($\Leftarrow$): $\sup\{\|x\| : x \in A\} = \sup\{\|\tau(x)\| : x \in A\}$ όπου το

$\tau : X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση

Η $(\tau(x))_{x \in A}$ είναι οικογένεια στον $X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \mathbb{R})$ και μάλιστα κατά σημείο φραγμένη αφού $\forall f \in X^*$ το $\sup\{|\tau(x)(f)| : x \in A\} \overset{\text{υπόθ.}}{=} \sup\{|f(x)| : x \in A\} < +\infty$

Άρα, από την αρχή του ομοιομ. φράγματος προκύπτει

$\sup\{\|\tau(x)\| : x \in A\} < +\infty$ δηλ. $\sup\{\|x\| : x \in A\} < +\infty$